不動点定理と一致点定理(変換群の理論とその応用)

原, 靖浩

数理解析研究所講究録
第 1569 巻 2007 年 63-68

不動点定理と一致点定理

大阪大学大学院理学研究科　原 靖浩 (Yasuhiro Hara)
Graduate School of Science, Osaka University

1 Brouwer の不動点定理とその一般化

私は最近 Borsuk-Ulam の定理の拡張の講演ばかりをしていて、毎回、同じような内容を話しているので、少し別の話をしようと思い、不動点定理について話してみることにしました。Borsuk-Ulam の定理との共通点や証明で関係のある部分を探すことが目的でしたが、それほど深いことがわかったわけではなく、新しい内容もありません。しかし、Borsuk-Ulam の定理や Brouwer の不動点定理をホモロジーを学習したばかりの大学生などに紹介するときに面白い拡張や考え方として紹介できる部分があるのではないかと思い、この講究録にまとめとして書くことにしました。

まずは、位相幾何学的な視点から見て Brouwer の不動点定理の一般化を考えてみることにしましょう。Brouwer の不動点定理は $D^n = \{x \in \boldsymbol{R}^n \mid \|x\| \leqq 1\}$ に対する以下のような定理です。

Brouwer の不動点定理. 任意の連続写像 $f : D^n \to D^n$ は不動点 ($f(x) = x$ となる点 $x \in D^n$) をもつ.

まず、一般的な教科書に書いてある証明を書いておきます.

証明. 背理法により証明する。$f : D^n \to D^n$ が不動点を持たないと仮定する。D^n の任意の点 x に対して $f(x) \neq x$ であるから、$f(x)$ から x へ向かう半直線を考えることができて、この半直線と $S^{n-1}\,(\subset D^n)$ との交点を $g(x)$ とすると、連続写像 $g : D^n \to S^{n-1}$ を得る。

$i : S^{n-1} \to D^n$ を包含写像とすると、$g \circ i = \mathrm{id}_{S^{n-1}} : S^{n-1} \to S^{n-1}$ であり、

$$g_* \circ i_* = (\mathrm{id}_{S^{n-1}})_* : H_{n-1}(S^{n-1}; \boldsymbol{Z}) \to H_{n-1}(S^{n-1}; \boldsymbol{Z}) .$$

$H_{n-1}(S^{n-1}; \boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}$ であり、一方、$i_* : H_{n-1}(S^{n-1}; \boldsymbol{Z}) \to H_{n-1}(D^n; \boldsymbol{Z})$ は $H_{n-1}(D^n; \boldsymbol{Z}) = 0$ より自明な準同型となっているので、これは矛盾。したがって、$f : D^n \to D^n$ は不動点を持つ。∎

Brouwer が最初にこの定理を証明したときは、まだホモロジー群はきちんと定義されたものではなく、別の方法で証明したようです。それについては [1] の中で松本幸夫先生が書いています。

さて、不動点を一般化した概念として、一致点というものがあります。空間 X から Y への二つの写像 f, g に対して、$f(x)=g(x)$ を満たすような $x \in X$ のことを一致点と呼びます。$f: X \to X$ の不動点は f と $\mathrm{id}_X : X \to X$ の一致点と考えられるわけです。

Brouwer の不動点定理を一致点に一般化しようとすると、id_{D^n} をもっと一般の連続写像にすることになりますが、写像に連続以外の条件が何もなしでは必ずしも一致点は存在しません。上の証明を見ると、D^n の境界が境界へと移り、id_{D^n} を境界上に制限したとき、誘導されるホモロジーの準同型が自明な準同型でないことが使われています。ですから、id_{D^n} の代りに、連続写像 $g: D^n \to D^n$ で 、境界 S^{n-1} において $g|S^{n-1}$ から誘導されるホモロジーの準同型 $(g|S_{n-1})*: H_{n-1}(S^{n-1};\boldsymbol{Z}) \to H_{n-1}(S^{n-1};\boldsymbol{Z})$ が自明な順同型でないようなものを取ると、任意の連続写像 $f: D^n \to D^n$ に対して、$f(x)=g(x)$ となる点 $x \in D^n$ が存在することがわかります。

さらに、定義域は D^n である必要はありません。下の定理のように、ある条件をみたすような境界付き多様体に拡張することができます。

定理 1.1. M を連結な境界 ∂M を持つようなコンパクトで向き付け可能な n 次元多様体で、包含写像 $i: \partial M \to M$ から誘導されるホモロジーの準同型 $i_* :: H^{n-1}(\partial M;\boldsymbol{Z}) \to H^{n-1}(M;\boldsymbol{Z})$ が自明な準同型になるようなものとする。連続写像 $g: M \to D^n$ が $g(\partial M) = S^{n-1}$ を満たし、$(g|\partial M)_*: H_{n-1}(\partial M;\boldsymbol{Z}) \to H_{n-1}(S^{n-1};\boldsymbol{Z})$ が自明な準同型でないとき、任意の連続写像 $f: M \to D^n$ に対して、f と g は一致点をもつ。(つまり $f(x)=g(x)$ となる点 $x \in M$ が存在する。)

さらなる一般化もあるでしょうが、とりあえず、これがもとの証明の方針に沿った Brouwer の不動点定理のわかりやすい一般化の一つの形です。

2 Lefschetz 数

前節で、Brouwer の不動点定理の一般化を教科書などに載っている証明に沿って一般化したわけですが、実は、いくつかの位相幾何学の教科書にも書いているように、Lefschetz の不動点定理を用いると、Brouwer の不動点定理は簡単に証明できてしまいます。

コンパクト連結多様体 M (境界はあってもよい) と連続写像 $f: M \to M$ に対して、Lefschetz 数 $L(f)$ は

$$L(f) = \sum_{i \geqq 0} (-1)^i \mathrm{tr}(f_* : H_i(M;\boldsymbol{Q}) \to H_i(M;\boldsymbol{Q}))$$

により定義されるもので、Lefschetz の不動点定理とは「$L(f) \neq 0$ ならば f には不動点が存在する」というものです。(実際には多様体よりも、もう少し一般の空間で Lefschetz の不動点定理は成り立ちます。) 任意の連続写像 $f: D^n \to D^n$ に対して、$L(f)=1$ ですから f は不動点を持つという Brouwer の定理が Lefschetz の不動点定理の系として得られるわけです。Lefschetz 数については、[1] の松本幸夫先生の論説の中にも書いてあり、

Lefschetz は交叉理論についての考察から Lefschetz 数を定義したとのことです。以下では、前節で証明した定理 1.1 を証明するために一致点に関する Lefschetz 数について書いていくことにします。(ほとんど [4] に書いてあることです。)

まず、M, N をそれぞれ境界をもつ、向きづけられたコンパクト連結 n 次元多様体とします。$f : M \to N$, $g : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ を連続写像とするとき、Lefschetz 数 $L(f, g)$ を

$$L(f,g) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \mathrm{tr}(f^* \circ g_! : H^i(M; \boldsymbol{Q}) \to H^i(M; \boldsymbol{Q}))$$

により定義します。ここで、$g_! : H^i(M; \boldsymbol{Q}) \to H^i(N; \boldsymbol{Q})$ は Gysin 準同型です。

$\hat{f}, \hat{g} : M \to M \times N$ をそれぞれ $\hat{f}(x) = (x, f(x))$, $\hat{g}(x) = (x, g(x))$ により定義し、M の基本ホモロジー類 μ_M に対して、$\hat{f}_*(\mu_M) \in H_n((M, \partial M) \times N; \boldsymbol{Z})$, $\hat{g}_*(\mu_M) \in H_n(M \times (N, \partial N); \boldsymbol{Z})$ と考え、交叉数

$$\hat{f}_*(\mu_M) \cdot \hat{g}_*(\mu_M) = D(D^{-1}\hat{g}_*(\mu_M) \cup D^{-1}\hat{f}_*(\mu_M)) \in H_0(M \times N; \boldsymbol{Z}) \cong \boldsymbol{Z}$$

(D はポアンカレ双対同型) を考えます。f のグラフを Γ_f、g のグラフを Γ_g と書き、交叉数 $\hat{f}_*(\mu_M) \cdot \hat{g}_*(\mu_M)$ を以下では $\Gamma_f \cdot \Gamma_g$ と書くことにします。

対角写像 $d : M \to M \times M$ を写像 $d : (M, \partial M) \to (M \times M, M \times \partial M)$ と見てその Gysin 準同型 $d_! : H^i(M; \boldsymbol{Z}) \to H^{i+n}((M, \partial M) \times M; \boldsymbol{Z})$ による $1 \in H^0(M; \boldsymbol{Z})$ の像 $d_!(1) \in H^n((M, \partial M) \times M; \boldsymbol{Z})$ を対角コホモロジー類と呼ぶことにします。

M はコンパクトだから $H^*(M; \boldsymbol{Q})$ は次数付き有限次元ベクトル空間で、その斉次基底 $\{u_i\}$ を一つとります。$H^*(M, \partial M; \boldsymbol{Q})$ の斉次基底 $\{u_i^*\}$ を

$$\langle \mu_M, u_i^* \cup u_j \rangle = \delta_{ij}$$

により定めるとき、

$$d_!(1) = \sum_i (-1)^{\dim u_i} u_i^* \times u_i$$

が成り立ち、

$$\begin{aligned} \hat{g}_!(1) &= (\mathrm{id} \times g)_!(d_!(1)) = (\mathrm{id} \times g_!)(d(1)) \\ &= \sum_i (-1)^{\dim u_i} u_i^* \times g_!(u_i) \end{aligned}$$

を得ます。したがって、

$$
\begin{aligned}
\Gamma_f \cdot \Gamma_g &= \langle \mu_{M\times N}, D^{-1}\hat{f}_*(\mu_M) \cup D^{-1}\hat{g}_*(\mu_M)\rangle \\
&= \langle \mu_{M\times N} \cap D^{-1}\hat{f}_*(\mu_M), D^{-1}\hat{g}_*(\mu_M)\rangle \\
&= \langle \hat{f}_*(\mu_M), \hat{g}_!(1)\rangle \\
&= \langle \mu_M, \hat{f}^*\hat{g}_!(1)\rangle \\
&= \langle \mu_M, \hat{f}^*(\sum_i (-1)^{\dim u_i} u_i^* \times g_!(u_i))\rangle \\
&= \langle \mu_M, \sum_i (-1)^{\dim u_i} u_i^* \times f^*g_!(u_i)\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \mathrm{tr}(f^*g_! : H^j(M;\boldsymbol{Q}) \to H^j(M;\boldsymbol{Q})) = L(f,g).
\end{aligned}
$$

つまり、次の定理が成り立つわけです。

定理 2.1. M, N, $f : M \to N$, $g : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ を上と同じものとするとき、

$$L(f,g) = \Gamma_f \cdot \Gamma_g$$

この命題から $L(f,g) \neq 0$ のときは $\Gamma_f \cap \Gamma_g \neq \emptyset$、したがって、$f$ と g は不動点を持つことがわかります。

一応、定理 1.1 が定理 2.1 の系になっていることを見ておきましょう。定理 1.1 の状況のとき、$H^p(D^n;\boldsymbol{Q})$ は $p = 0$ のとき $\boldsymbol{Q}$ と同型で、それ以外は 0 ですから、$L(f,g) = f^*g_!(1)$ です。$f^* : H^0(D^n;\boldsymbol{Q}) \to H^0(M;\boldsymbol{Q})$ は同型写像ですから、$g_!(1)$、つまり $g_*(\mu_M)$ だけを調べればいいわけです。次の可換図式を考えます。

$$
\begin{array}{ccccc}
H_n(M,\partial M) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(\partial M) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(M) \\
{\scriptstyle g_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_*} & & \downarrow{\scriptstyle g_*} \\
H_n(D^n, S^{n-1}) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*} & H_{n-1}(D^n)
\end{array}
$$

$i_* :: H^{n-1}(\partial M;\boldsymbol{Z}) \to H^{n-1}(M;\boldsymbol{Z})$ が自明な準同型ということから、$\partial_* : H_n(M,\partial M) \to H_{n-1}(\partial M)$ は全射（実際には同型）であることがわかります。定理 1.1 の仮定から $(g|\partial M)_* : H_{n-1}(\partial M;\boldsymbol{Z}) \to H_{n-1}(S^{n-1};\boldsymbol{Z})$ は自明な準同型でないので、$\partial_* \circ g_* = (g|\partial M)_* \circ \partial_*$ は自明な準同型ではないことになります。$\partial_* : H_n(D^n, S^{n-1}) \to H_{n-1}(S^{n-1})$ は同型写像ですから、$g_* : H_n(M,\partial M) \to H_n(D^n, S^{n-1})$ は自明な準同型ではなく、$g_*(\mu_M) \neq 0$ が示されます。よって、定理 1.1 の状況のときは $L(f,g) \neq 0$ であり、f と g は一致点を持つことがわかります。

Lefschetz 数の性質をもう少し詳しく見るために Lefschetz の一致点公式のことも書いておきましょう。上と同様に、M, N をそれぞれ境界をもつ、向きづけられたコンパクト

連結 n 次元多様体、$f : M \to N$, $g : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ を連続写像とします。f と g の一致点集合 $C(f,g) = \{x \in M \mid f(x) = g(x)\}$ が有限個の点 $x_1, \cdots, x_k$ からなり、$C(f,g) \cap \partial M \neq \emptyset$ であるとき、以下のように、一致点指数 $I_{x_i}(f,g)$ を定義します。

各 x_i のまわりの D^n と同相な閉近傍 $\bar{U}_i$ と $f(x_i) = g(x_i)$ のまわりの D^n と同相な閉近傍 $\bar{V}_i$ を $f(\bar{U}_i) \subset \bar{V}_i$, $g(\bar{U}_i) \subset \bar{V}_i$, $i \neq j$ ならば $\bar{U}_i \cap \bar{U}_j = \emptyset$ を満たすようにとります。$\bar{V}_i = D^n \subset \boldsymbol{R}^n$ とみなし、$\bar{U}_i$ を十分小さく取って、任意の $x \in \bar{U}_i$ に対して $g(x) - f(x) \in D^n$ となるようにしておくと、$g - f$ は $(\bar{U}_i, \bar{U}_i - \{x_i\})$ から $(D^n, D^n - 0)$ への連続写像とみることができます。この $g - f$ の写像度を $I_{x_i}(f,g)$ と定義します。Lefschetz の一致点公式は次のように書くことができます。

Lefschetz の一致点公式. 多様体 M, N および連続写像 $f : M \to N$, $g : (M, \partial M) \to (N, \partial N)$ は上の条件を満たすものとする。($C(f,g)$ は有限個の点 $x_1, \cdots, x_k$ からなり、$C(f,g) \cap \partial M \neq \emptyset$。) このとき、次の等式が成り立つ。

$$\sum_{i=1}^{k} I_{x_i}(f,g) = L(f,g)$$

3 Lefschetz 数と Borsuk-Ulam の定理、その他

前節で、Lefschetz 数について書きましたが、Borsuk-Ulam の定理と関係する次の定理は Lefschetz 数を用いると簡単に証明できてしまいます。

定理 3.1. 連続写像 $f : S^n \to S^n$ が $f(-x) = -f(x)$ を満たすとき、$\deg f$ は奇数。

証明. f とホモトピー同値な写像 g で、不動点が有限個しかなく、$g(-x) = -g(x)$ を満たすようなものが存在する。このとき、x が不動点ならば $-x$ も不動点であり、不動点の個数は偶数。よって、Lefschetz の一致点公式より $L(g)(= L(g, id_{S^n}))$ は偶数、したがって、$L(f)$ も偶数である。$L(f) = 1 + (-1)^n \deg f$ だから、$\deg f$ は奇数になる。∎

さて、Brouwer の不動点定理は Lefschetz 数の不動点定理、一致点定理というものに拡張されるわけですが、定理 3.1 と同様にし、今度は一致点を考えることにより、次のことがわかります。

命題 3.2. M を $\boldsymbol{Z}_2$ が自由に作用する向きづけられた連結な n 次元閉多様体とし、S^n には $\boldsymbol{Z}_2$ の対心点作用を考える。このとき、任意の二つの $\boldsymbol{Z}_2$ 写像 $f : M \to S^n, g : M \to S^n$ に対して、$\deg f \equiv \deg g \pmod 2$。

この命題はもともと知られているもので、[3] の中の定理 1.1 と補題 3.1 から導くこともできます。もっと一般的に [2]、[5] の中で得たような Lie 群が自由に作用する多様体間の同変写像に対する写像度に関する定理がどのように Lefschetz 数による Borsuk-Ulam の

定理と関係しているかを Lefschetz 数に関係する定理の証明を見ながら調べることが目的の一つだったのですが、現在のところあまり進展していません。

ここでは Brouwer の不動点定理から始まって、位相幾何学的な視点で一般化、Lefschetz 数というものを見てきたわけですが、[1] の中には、Brouwer の定理の解析学における応用や、Banach 空間や多価写像という位相幾何学とはまったく違う方向への一般化が書かれていて、大変興味深く思いました。

参考文献

[1] 数学の楽しみ 2007 冬「不動点とは何だろう？」(編集：上野健爾, 砂田利一, 新井仁之), 日本評論社

[2] Y. Hara, The degree of equivariant maps, Topology Appl. **148**(2005), 113–121.

[3] 原靖浩, 同変写像の写像度について, 数理解析研究所講究録 1393 (2004), 1–8.

[4] 服部晶夫, 位相幾何学, 岩波基礎数学選書 (1991).

[5] A. Inoue, Borsuk-Ulam type theorems on Stiefel manifolds, Osaka J. Math. **43**(2006), 183–191.

[6] 中岡稔, 不動点定理とその周辺, 岩波書店, 1977.